TABLE DES MATIERES

01

Le but de ce problème d'étudier la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ avec $x \in [0;+\infty[$.

I. Soit la fonction g définie sur $D = [0;+\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

01. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

02. ..

a. Calculer g' la fonction dérivée de g pour tout x de $D = [0;+\infty[$ puit montrer que $\forall x > 0$, $g'(x) > 0$

b. Calculer $g(0)$ et on déduit que $\forall x > 0$, $g(x) > 0$; puis $\forall x \ge 0$, $e^x > x$.

II. Soit la fonction h définie sur $D = [0;+\infty[$ par : $h(x) = -1 + (2 - x)e^x$.

01. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

02. ..

a. Calculer h' la fonction dérivée de h pour tout x de $D = [0;+\infty[$.

b. On déduit le signe de $h'(x)$.

c. donner le tableau de variations de h .

d. montrer que l'équation : $x \in [0;+\infty[$; $h(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $\alpha > 1$.

e. Vérifier que : $1,84 < \alpha < 1,85$.

f. Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x de $[0;+\infty[$.

III. ..

a. Soit la fonction f définie sur $D = [0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

b. (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité de mesure 2 cm.

(la construction sera sur l'annexe 2 voir page 4)

01. Montrer que f est définie pour tout x de $[0;+\infty[$.

02. Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.

03. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; donner une interprétation géométrique du résultat obtenu .

04. Montrer que $\forall x\in[0;+\infty[\ ,\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.

05. Donner le signe de f ' puis donner le tableau de variations de f .

06. Montrer que : $\forall x\in[0;+\infty[\ ,\ f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

07. On déduit suivant les valeurs de x de $D=[0;+\infty[$ la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f et la droite (D) d'équation $(D)\ :\ y=x$.

08. Construire la courbe (C_f) de f et la droite (D) d'équation $y=x$ dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité de mesure $2\ \text{cm}$. (la construction sera sur l'annexe voir page 7) .

09. ..

a. Montrer que : $\int_2^4 f(x)dx=\ln(e^2+2)$.

b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

10. Soit k la restriction de f sur l'intervalle $I=[0;\alpha]$.

a. Montrer que la restriction k admet une fonction réciproque k^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .

b. Construire la courbe $(C_{k^{-1}})$ de la fonction réciproque k^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c. Vérifier que $k(1)=1$; puis montrer que k^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(k^{-1})'(1)$.

IV. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

01. Montrer que $f([0,1])\subset[0,1]$.

02. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 0\le u_n\le 1$.

03. ..

a. Présenter sur l'axe des abscisses : u_0 et u_1 et u_2 ; On utilise (C_f) et la droite (D) .

b. Donner la conjoncture sur la monotonie de (u_n) .

c. Prouver la validité de la conjecture .

d. On déduit que (u_n) est une suite convergente .

e. Déterminer la limite de la suite (u_n).

02

I. On donne le nombre complexe suivant : $a=2+\sqrt{3}+i$.

01. Montre que : le module de a est $\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

02. Vérifier que : $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)+2i\sin\frac{\pi}{6}$.

03. ..

a. θ est un nombre réel : montrer que : $1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$ (on rappelle que $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$).

b. Montrer que : $a=4\cos^2\frac{\pi}{12}+4i\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$ (on rappelle que $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$).

c. Montrer que : $4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ est l'écriture trigonométrique de a puis on déduit la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

II. On considère l'équation suivante : (E) : $z\in\mathbb{C}$, $z^2-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}z+1=0$.

01. Montrer que : $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

02. Déterminer : z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) avec $\mathrm{Im}(z_1)>0$.

03. On déduit les solutions de l'équation différentielle suivante : $(E): 2y''-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)y'+2y=0$.

04. Donner l'écriture trigonométrique de : z_1 et z_2 .

III. Dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$; on considère les points A et B tel que leurs affixes sont $a=2+\sqrt{3}+i$ et b ; R est la rotation de centre le point O origine du repère et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

01. ..

a. Donner l'écriture complexe de la rotation R .

b. Donner l'écriture trigonométrique de b l'affixe de B tel que B est l'image de A par la rotation R .

03

Le but de cet exercice d'étudier la convergence de (u_n) de quatre manières différentes :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n-3}{3u_n-1} \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$.

1ère manière :

01. Calculer u_1 et u_2 .

02. Démontrer que : $u_n \neq \frac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

03. Démontrer que : $1 < u_n \leq 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

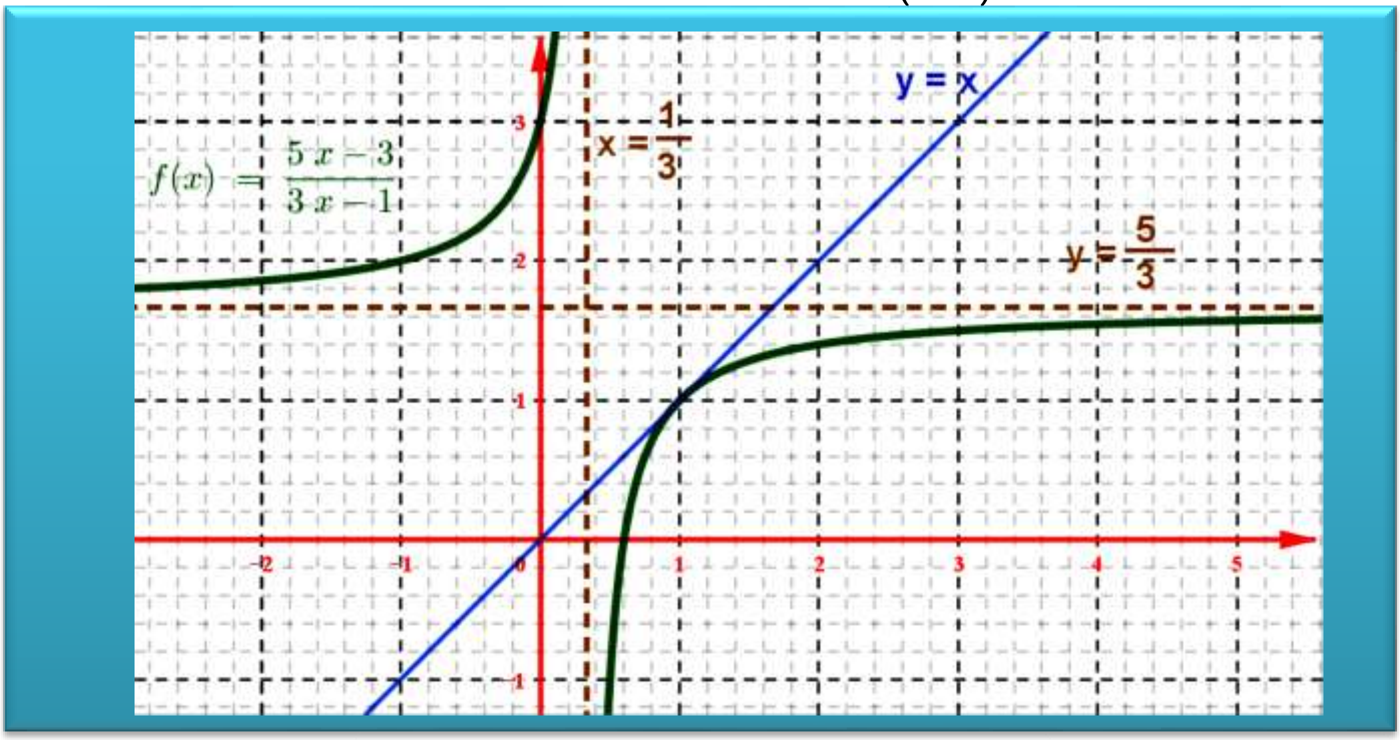
04. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{-3(u_n - 1)^2}{3u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis on déduit la monotonie de (u_n) .

05. Etudier la convergence de (u_n) .

2ième manière :

06. ..

- On considère la fonction suivante : $f(x) = \frac{5x-3}{3x-1}$.
- (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



a. Déterminer graphiquement l'intersection de (C_f) et la droite (D) d'équation (D): $y = x$.

b. Déterminer graphiquement l'image de $I = [1,3]$ par la fonction f .

c. Placer u_0 et u_1 et u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses ; puis donner la conjecture obtenue pour l'encadrement de la suite (u_n) la monotonie de (u_n) et la limite de (u_n) .

3ième manière :

01. Maintenant on va démontrer la conjecture obtenue :

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 < u_n \leq 3$.

b. Démontrer que : (u_n) est croissante .

c. Est-ce que (u_n) est convergente .

d. Déterminer la limite de (u_n) .

4[ième] manière :

01. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Calculer : v_0 .

b. Montrer que : la suite (v_n) est arithmétique on détermine sa raison r .

c. Donner v_n en fonction de n

d. Donner u_n en fonction de n .

e. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; est que (u_n) est convergente .

f. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + v_3 + \cdots + v_n$.

g. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

04

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 4 \end{cases}$.

01.

e. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $3 \le u_n \le 8$.

f. Démontrer que : (u_n) est croissante .

g. Est-ce que (u_n) est convergente .

02. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 8$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que : la suite (v_n) est géométrique on détermine sa raison q .

b. Montrer que : $u_n = 8 - \frac{5}{2^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

d. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel p qui vérifie : pour tout n de $\mathbb{N}$ on a Si $n \ge p$ alors $u_n - 8 > -10^{-5}$.

e. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + v_3 + \cdots + v_n$.

f. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

05

السؤال 3 :

لتكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و زوجية و دورية دورها T .

A. المشتقة $f'(x)$ زوجية و دورية. B. المشتقة $f'(x)$ فردية و ليست بالضرورة دورية. C. $\forall k\in\mathbb{Z}, f'(kT)=0$	D. $\int_{T}^{2T} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$ E. جميع الأجوبة المقترحة خاطئة.

السؤال 4 : لتكن $f(x)$ الدالة المعرفة بما يلي $f(x)=\dfrac{e^{1-x}}{1+e^{-x}}$ ، و C_f المنحنى الممثل لها في معلم متعامد ممنظم .

A. مجال تعريف الدالة $f(x)$ هو $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. B. الدالة $f(x)$ تزايدية على مجال تعريفها . C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.	D. المعادلة $f(x)=e^{-x}$ ليس لها حل. E. يقاطع المماس للمنحنى C_f عند نقطة M أفصولها $x_M=0$ محور الأفاصيل عند النقطة $N(2;0)$.

السؤال 5 : لتكن $f(x)$ و $g(x)$ الدالتان المعرفتان على المجال $[0;1]$ بما يلي: $f(x)=2x$ و $g(x)=x^2$ ، و ليكن C_f المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ و C_g المنحنى الممثل للدالة $g(x)$ في معلم متعامد ممنظم .

المساحة S(بوحدة قياس المساحة) لحيز المستوى المحصور بين المنحنيين C_f و C_g و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$ هي:

A. 0 B. 1	C. $\frac{2}{3}$	D. 2	E. $\frac{1}{3}$

مباراة الولوج 2015/2014 — كلية الطب و الصيدلة - وجدة

السؤال 7 : اختر الجواب الصحيح:

A. يمثل المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تماثل المنحنى الممثل للدالة $f(x)=x^2+2x-1$. B. المنحنى الممثل لدالة ومقاربه المائل لا يتقاطعان أبدا .	C. نعتبر دالة عددية $g(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. المعادلة $g'(x)=2g(x)$ غير قابلة للحل في $\mathbb{R}$. D. الدالة $h(x)=\lvert 4x.(x-5)\rvert$ غير قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=5$	E. الدالة $f(x)=\lvert x+5\rvert-\lvert 3-x\rvert+2x-3$ لا تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

السؤال 8 : نعتبر المكعب ABCDEFGH (الشكل جانبه) طول ضلعه a .

A. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EA}$ B. $\overrightarrow{AG}$ متجهة منظمية على المستوى (BDE) . C. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=a^2$	D. المستقيم (AG) غير عمودي للمستقيم (DE) . E. $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BG}$.